30/11/2017

Μάθημα 8ο

Μέθοδος διαδοχικής Υπερχαλάρωσης
Successive Over-Relaxation (SOR)

$$A = D - L - U \quad , \ a_{ii} \neq 0 \quad , \ i = 1(1)n \quad , \ A = M_w - N_w$$

$$M_w = \frac{1}{w}(D - wL) \quad , \qquad w \neq 0$$

$$N_w = M_w - A = \frac{1}{w}(D - wL) - D + L + U =$$

$$= \frac{1}{w}\left[(1-w)D + wU\right]$$

$$(D - wL)\, x^{(k+1)} = \left[(1-w)D + wU\right] x^{(k)} + wb$$

$$k = 0,1,2,\ldots, \ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D - wL)^{-1}\left[(1-w)D + wU\right]}_{\mathcal{L}_w} x^{(k)} + w(D - wL)^{-1} b$$

$$k = 0,1,2,\ldots, \ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-w)\, x_i^{(k)} + w \, \frac{\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]}{a_{ii}}$$

κλάσμα.

$i = 1(1)n$

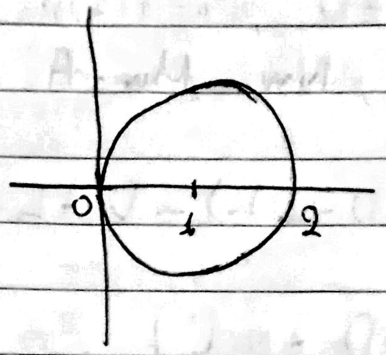
$k = 0,1,2,\ldots, \ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

Θεώρημα (Kahan)

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $a_{ii} \neq 0$, $i = 1(1)n$

Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου είναι: $|w-1| < 1$ για $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

και $w \in (0,2)$ για $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



(Η SOR είναι γενίκευση της G-S όχι της Jacobi)

Απόδειξη Θεωρήματος

$$\det(\mathcal{L}_w) = \det\left[(D-wL)^{-1}\left((1-w)D + wU\right)\right] =$$

$$= \det\left[(D-wL)^{-1}\right] \det\left[(1-w)D + wU\right] = \frac{1}{\cancel{\det(D)}} (1-w)^n \cancel{\det(D)} =$$

$$= (1-w)^n$$

$$\det(\mathcal{L}_w) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Για να συγκλίνει πρέπει $|\lambda_i| < 1 \ \forall i = 1(1)n \Rightarrow$

$$\prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| < 1 \iff |(1-w)^n| < 1 \iff |1-w| < 1$$

για $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad |1-w| < 1 \iff w \in (0,2)$

απόδειξη εκτός

Θεώρημα (Reich - Ostrowsky - Varga):

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ερμιτιανός και θετικά ορισμένος. Για $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, το διάστημα $(0,2)$ είναι ικανό και αναγκαίο για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου.

Πόρισμα

Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ερμιτιανός και θετικά ορισμένος τότε η Gauss-Seidel συγκλίνει.

Ορισμός

Ένας μη διαγώνιος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $a_{ii} \neq 0$, $i = 1(1)n$, λέγεται δικυκλικός αν-ν υπάρχει μεταθετικός πίνακας P τέτοιος ώστε:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} D_1 & B \\ C & D_2 \end{bmatrix}$$, όπου D_1, D_2 διαγώνιοι πίνακες

Κάθε τριδιαγώνιος πίνακας είναι δικυκλικός

$$P = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^3 \\ e^2 \\ e^4 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^3 \\ e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ 0 & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{33} & a_{32} \\ \hline a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{array}\right]$$

<u>Ορισμός</u>

Ένας δικυκλικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ καλείται συνεπώς διατεταγμένος αν-ν:

$$\sigma\left(D^{-1}\left(aL + \frac{1}{a}U\right)\right) = \sigma\left(D^{-1}(L+U)\right) \quad \forall a \neq 0$$

Κάθε τριδιαγώνιος πίνακας και κάθε πίνακας που είναι στην δικυκλική του μορφή είναι συνεπώς διατεταγμένος.

<u>Λήμμα</u>

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος. Τότε οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του πίνακα Jacobi αποτελούν ζεύγη αντίθετων ιδιοτιμών.

Έστω $\mu \neq 0$, $\mu \in \sigma(D^{-1}(L+U)) \iff$

$\mu \in \sigma\left(D^{-1}\left(aL + \frac{1}{a}U\right)\right) \; \forall a \neq 0 \iff$

$\Leftrightarrow \mu \in \sigma\left(D^{-1}\left(-L + \frac{1}{-1}U\right)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\mu \in \sigma\left(D^{-1}(L+U)\right)$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος
Έστω μ ιδιοτιμή του Jacobi και $\lambda \neq 0$ ώστε
να ισχύει η σχέση : $(\lambda + w - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda$ (1)
τότε $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_w)$
Αντίστροφα, αν $\lambda \neq 0$: $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_w)$ και μ τ.ω.
να ισχύει η (1) τότε μ είναι ιδιοτιμή του Jacobi

απόδειξη εντός

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ δικυκλικό και συνεπώς διατεταγμένο
και $\sigma(T_J) \in (-1, 1)$ (άρα J. συγκλίνει και πραγματικές ιδιοτιμές) με $\beta = \rho(T_J) < 1$

$\hookrightarrow$ διακυσματική ακτίνα του Jacobi

Τότε, η SOR μέθοδος συγκλίνει $\forall w \in (0,2)$
και η βέλτιστη τιμή του w είναι :

$$w_\beta = \frac{2}{1 + \sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{και} \quad \rho(\mathcal{L}_{w_\beta}) = w_\beta - 1.$$

Για $w = 1$ η (1) γίνεται $\lambda^2 = \mu^2 \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda - \mu^2) = 0$
$\overset{(\lambda \neq 0)}{\Longrightarrow} \lambda = \mu^2$

$\rho(T_{GS}) = (\rho(T_J))^2$
Η GS συγκλίνει με διπλάσια ταχύτητα από Jacobi

Άσκηση 7 σελ 101

$Ax=b$, $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ο A συμμ. και Θ.Ο. $\xRightarrow{R-O-V}$ SOR συγκλίνει $\forall w \in (0,2) \Rightarrow$
η Gauss - Seidel συγκλίνει $\xRightarrow{\lambda=\mu^2}$ $|\lambda|<1$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $|\mu|<1$ $\Rightarrow$ η Jacobi συγκλίνει

$T_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\sigma(T_J) = \{0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$, $\rho(T_J) = \sqrt{2}/2 < 1$
επειδή A διαγώνιος και συνεπώς διατεταγμένος
$\sigma(T_{GS}) = \{0, 0, 1/2\}$
$\rho(T_{GS}) = \rho(T_J)^2 = \frac{1}{2}$

Βέλτιστη τιμή του w : $w_B = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2}} =$

$= \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2(1-\sqrt{2}/2)}{1/2} =$

$= 4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4-2\sqrt{2} \simeq 1,1716$

φασματική ακτίνα $\rho(\mathcal{L}_{w_B}) = w_B - 1 = 0,1716$

Να εφαρμόσουμε με 1.25 μια επικάλυψη της SOR.

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{\frac{5}{4}\left(2 + 1\cdot x_2^{(k)}\right)}{2^{(=a_{11})}} =$$

$$= -\frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{5}{8}\left(2 + x_2^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{5}{8}\left(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{5}{8}x_2^{(k+1)}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} - \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8}\left(2 + \frac{13}{8}\right) - \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8}\cdot\frac{129}{64} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} \\ \frac{129}{64} \\ \frac{5/7}{5/2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Block επαναληπτική μέθοδος

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$, A_{ii} τετραγωνικοί πίνακες

$A = D - L - U$, L: Block-κάτω τριγωνικό μέρος
U: Block-άνω τριγωνικό μέρος

$$D = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{bmatrix}$$

$$T_{BJ} = D^{-1}(L+U) =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{kk}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & \cdots & -A_{1k} \\ -A_{21} & 0 & \cdots & -A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_{k1} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Block Gauss-Seidel
Block SOR

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \end{array}\right] , \quad T_{BJ} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)\quad \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ & 3/2 & 1/2 & 1 \end{array}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$T_{BJ} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(T_{BJ} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1/3 \\ 0 & -\lambda & 2/3 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 2/3 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1/3) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \sqrt{3}/3 \\ \lambda_3 = -\sqrt{3}/3 \end{cases}$$

$$\rho(T_{BJ}) = \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 \qquad \rho(\mathcal{L}_{\omega_0}) = \omega_0 - 1 = 0{,}1010$$

$$\sigma(T_{BGS}) = \{0, 0, 1/3\}$$

$$\omega_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{3}}} = 6\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 1{,}101.$$